

数 学

(120分)

数学Ⅰ, 数学Ⅱ, 数学Ⅲ, 数学A, 数学B

2024年3月12日

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は**6**ページあります。
試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合には、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答用紙は**4**枚です。解答はすべて解答用紙の所定の場所に、途中経過も含めて記入しなさい。解答用紙は裏面も使用できます。
- 4 受験番号は、すべての解答用紙の所定の欄（**2**か所）に必ず記入しなさい。
- 5 試験終了後は、解答用紙の上にある白ぬきの番号の順に並べなさい。
- 6 配付した解答用紙は持ち出してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

このページは空白である。

第1問 (100点)

問1 6個の数字 1, 1, 2, 2, 3, 3 のうちの5個を並べて、5桁の整数を作るとき、整数は何個作れるか。

問2 $f(x) = \sqrt{\frac{-x-1}{x-2}}$ とおく。

(1) $f(x)$ の定義域と値域を求めよ。

(2) $f(x)$ が増加関数であることを示し、 $f(x)$ の逆関数を求めよ。

問3 次の不定積分、定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} dx$

(2) $\int_2^8 \frac{1}{x(x+1)} \log \frac{x}{x+1} dx$

第2問 (100点)

問1 整数 a_n ($n=1,2,3,\dots$) は, 3進法で表すと n 桁の数で, 各桁がすべて1である数 $\underbrace{11\dots\dots 1}_{n\text{個}}_{(3)}$ とする。たとえば, a_1 を3進法で表すと $1_{(3)}$, a_4 を3進法で表すと $1111_{(3)}$ である。

(1) a_2, a_3 を10進法で表せ。

(2) $n \geq 2$ とするとき, $a_n - a_{n-1}$ を n を用いて表せ。

(3) $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。

問2 a, b を実数, c を正の実数とし, $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく。次の命題の真偽をそれぞれ調べよ。真ならば証明をし, 偽ならば反例を一つあげよ。

(1) $a+b+c > 0$ であれば, 方程式 $f(x) = 0$ は実数解を持たない。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が実数解を持たないならば, $a+b+c > 0$ である。

第3問 (100点)

$\triangle ABC$ において、 $AB = 6, AC = 5, \angle BAC = \frac{\pi}{3}$ であるとし、辺 BC の中点を M とする。
また、 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とし、線分 AM を $t : (1-t)$ に内分する点を P 、直線 BP と直線 AC の交点を Q とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とするとき、次の問いに答えよ。

問1 $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}$ をそれぞれ t, \vec{b}, \vec{c} を用いて表せ。

問2 \overrightarrow{AQ} を t, \vec{c} を用いて表せ。

問3 $BQ \perp AC$ となるときの t の値を求めよ。

問4 t が問3で求めた値であるとき、 $\triangle APQ$ の面積を求めよ。

第4問 (100点)

関数 $f(x) = 2\cos 2x + 4\sin x + 1$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) について、次の問いに答えよ。

問1 関数 $f(x)$ の増減を調べよ。また、 $f(x)$ の最大値、最小値を求めよ。

問2 等式 $f(x) = 0$ を満たす x の値を求めよ。

問3 定積分 $\int_0^{2\pi} |f(x)| dx$ を求めよ。